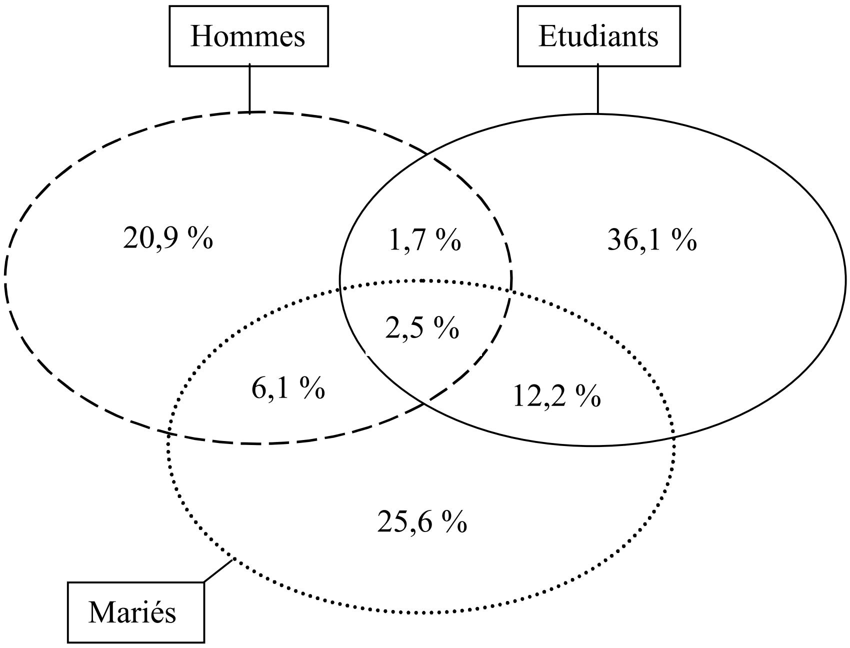
<u>Olympiades de mathématiques 2001 – Académie de Caen</u>

<u>Exercice N°1</u>

1°) On peut tout d'abord remarquer que, quelle que soit la position du dé, le basculement autour d'une arête de la face en contact avec la table permet de mettre en contact avec la table toute face autre que celle qui l'est déjà.
La valeur maximale de la somme sera obtenue en utilisant les faces du dé portant les plus grands nombres, c'est à dire 3 et 4.
La somme sera constituée de 2002 termes, c'est à dire le « 1 » initial et les « résultats » de chacune des 2001 étapes et sera donc maximale avec 1001 « 4 » et 1000 « 3 ».
D'où $\text{Max}(S) = 1 + 1001 \times 4 + 1000 \times 3 = 7005$.
De la même manière la valeur minimale de la somme sera obtenue en utilisant les faces du dé portant les plus petits nombres soit 1 et 2. De plus le « 1 » étant initialement en contact avec la table, la série des « résultats » des 2001 étapes commencera par un « 2 » et sera donc constituée de 1001 « 2 » et de 1000 « 1 ».
D'où $\text{Min}(S) = 1 + 1001 \times 2 + 1000 \times 1 = 3003$.
2°) Partant de la série donnant la somme minimale, on peut, en modifiant les faces basculées sur la table, obtenir des sommes différentes.
En utilisant p « 3 » (p entier, $1 \leqslant p \leqslant 1001$) à la place de p « 2 », on pourra obtenir une somme égale à $3003 + p$, donc toute somme comprise entre 3004 et 4004.
Partant de la série précédente permettant d'obtenir 4004 et constituée de 1001 « 1 » et de 1001 « 3 », en utilisant p « 4 » (p entier, $1 \leqslant p \leqslant 1001$) à la place de p « 3 », on pourra obtenir une somme égale à $4004 + p$, donc toute somme comprise entre 4005 et 5005.
Partant de la série précédente permettant d'obtenir 5005 et constituée de 1001 « 1 » et de 1001 « 4 », en utilisant p « 2 » (p entier, $1 \leqslant p \leqslant 1000$) à la place de p « 1 » on pourra obtenir une somme égale à $5005 + p$, donc toute somme comprise entre 5005 et 6005.
Partant de la série précédente permettant d'obtenir 6005 et constituée de 1 « 1 » de 1000 « 2 » et de 1001 « 4 », en utilisant p « 3 » (p entier, $1 \leqslant p \leqslant 1000$) à la place de p « 2 » on pourra obtenir une somme égale à $6005 + p$, donc toute somme comprise entre 6005 et 7005.

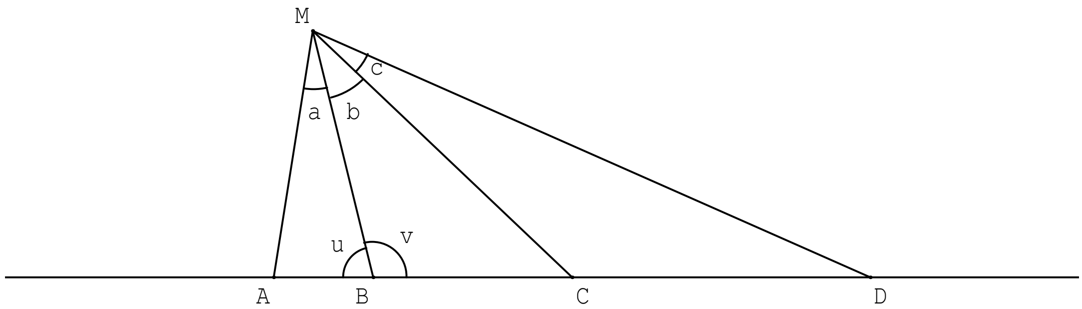
Exercice N°2

Le schéma ci-contre peut aider le raisonnement.
A l'intérieur de l'ovale en tirets sont représentées les personnes de sexe masculin de l'échantillon interrogé, à l'intérieur de l'ovale en pointillés, sont représentées les personnes mariées et à l'intérieur de l'ovale en traits pleins sont représentés les étudiants (des deux sexes).



Remarque : tous les pourcentages donnés dans le texte, comme ceux calculés ci-dessous, sont des pourcentages par rapport à la même population de référence, c'est à dire l'ensemble des lecteurs interrogés pour le sondage.
Dans la zone commune aux trois ovales, se trouvent les étudiants masculins mariés soit 2,5 % de la population.
Dans la zone commune aux ovales des hommes et des étudiants, il y a 4,2 % de la population et donc, dans la zone représentant les étudiants masculins non mariés, on trouve 4,2 %– 2,5 % de la population soit 1,7 %.
Les étudiants mariés sont 14,7 % de la population donc les étudiants mariés non masculins, c'est à dire les étudiantes mariées, sont 14,7 % – 2,5 % soit 12,2 % de la population.
Les hommes mariés sont 8,6 % de la population donc les hommes mariés non étudiants sont 8,6 % – 2,5 % soit 6,1 % de la population.
Les hommes représentent 31,2 % de la population donc les hommes célibataires non-étudiants sont 31,2 % – 1,7 % – 2,5 % – 6,1 % soit 20,9 % de la population.
Les étudiants représentent 52,5 % de la population donc les étudiants non-masculins non-mariés, c'est à dire les étudiantes célibataires, sont 52,5 % – 1,7 % – 2,5 % – 12,2 % soit 31,6 % de la population.
Les personnes mariées représentent 47 % de la population donc les femmes non-étudiantes mariées sont 47 % – 6,1 % – 2,5 % – 12,2 % soit 25,6 % de la population.
Or la somme de tous ces pourcentages est :
20,9 % + 1,7 % + 31,6 % + 6,1 % + 2,5 % + 12,2 % + 25,6 % = 105 ,7 %
Ce résultat supérieur à 100 % est incohérent puisque les catégories de population dont on vient d'additionner les pourcentages n'ont aucun élément en commun.

Exercice N°3
Solution analytique



• Les points M sur (AB) en dehors du segment [AD] sont solutions du problème puisqu'alors $a = b = c = 0$.

• Si M n'est pas sur (AB).
Dans le triangle MAB, $\dfrac{AB}{\sin a} = \dfrac{AM}{\sin u}$ donc $\sin a = \dfrac{AB}{AM}\sin u$.
Dans le triangle MBC, $\dfrac{BC}{\sin b} = \dfrac{MC}{\sin v}$ donc $\sin b = \dfrac{BC}{MC}\sin v$.
a et b ne pouvant être supplémentaires puisque M n'est pas sur (AB), $a = b$ ssi $\sin a = \sin b$.

Donc $a = b$ ssi $\dfrac{AB}{AM}\sin u = \dfrac{BC}{MC}\sin v$ ce qui équivaut à $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{BC}{MC}$ puisque $\sin u = \sin v$
ou encore à $\dfrac{CM}{AM} = \dfrac{BC}{AB}$ soit $\dfrac{CM}{AM} = 2$ (relation 1).
On obtient de la même manière $b = c$ ssi $\dfrac{DM}{BM} = \dfrac{CD}{BC}$ soit $\dfrac{DM}{BM} = \dfrac{d}{2}$ (relation 2).
Considérons le repère du plan $\left(C, \overrightarrow{AB}, \vec{j}\right)$ où $\vec{j}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et de norme 1. Ce repère est orthonormal.
A a alors pour coordonnées (-3 ; 0), B a pour coordonnées (-2 ; 0), C a pour coordonnées (0 ; 0) et D a pour coordonnées (d ; 0). Soit (x ; y) le couple des coordonnées de M.

$\dfrac{CM}{AM} = 2$ ssi $\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x+3)^2 + y^2}} = 2$ ssi $x^2 + y^2 = 4\left[(x+3)^2 + y^2\right]$ puisque tous les nombres intervenant sont positifs.
Donc $\dfrac{CM}{AM} = 2$ ssi $3x^2 + 3y^2 + 24x + 36 = 0$ ssi $x^2 + y^2 + 8x + 12 = 0$ (3)

$\dfrac{DM}{BM} = \dfrac{d}{2}$ ssi $\dfrac{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}} = \dfrac{d}{2}$ ssi $4\left[(x-d)^2 + y^2\right] = d^2\left[(x+2)^2 + y^2\right]$

ssi $\quad \left(d^2-4\right)x^2+\left(d^2-4\right)y^2+\left(4d^2+8d\right)x=0$

ssi $\quad (d-2)x^2+(d-2)y^2+4dx=0$ après simplification par d + 2 qui est non nul.

Si d = 2, cette dernière équation conduit à 8 x = 0, soit x = 0. L'équation (3) donne alors $y^2+12=0$ qui n'a pas de solution. On peut donc supposer d – 2 ≠ 0 et la dernière équation équivaut à $\quad x^2+y^2+\dfrac{4d}{d-2}x=0 \qquad$ (4).

Donc a = b et b = c ssi (x ; y) est solution du système $\begin{cases} x^2+y^2+8x+12y=0 \\ x^2+y^2+\dfrac{4d}{d-2}x=0 \end{cases}$,

système qui équivaut à $\begin{cases} x^2+y^2+8x+12y=0 \\ \dfrac{4d}{d-2}x=8x+12 \qquad (5) \end{cases}$ par soustraction membre à membre des deux équations du système précédent.

L'équation (5) par division par 4 et multiplication par d – 2 qui est non nul donne $dx=(2x+3)(d-2)$ qui équivaut à (d – 4) x = 6 – 3 d.

Si d = 4, cette dernière équation n'a pas de solution et le système non plus.

Si d ≠ 4, elle équivaut à $x=\dfrac{6-3d}{d-4}$.

(3) équivaut alors à $\left(\dfrac{6-3d}{d-4}\right)^2+y^2+8\dfrac{6-3d}{d-4}+12=0$ ou à $y^2=\dfrac{-(6-3d)^2-8(6-3d)(d-4)-12(d-4)^2}{(d-4)^2}$ soit $y^2=\dfrac{3d^2-12d-36}{(d-4)^2}$ ou encore $y^2=\dfrac{3(d-6)(d+2)}{(d-4)^2}$, équation qui n'a de solutions que si $\dfrac{3(d-6)(d+2)}{(d-4)^2}\geqslant 0$, c'est à dire si $d\geqslant 6$.

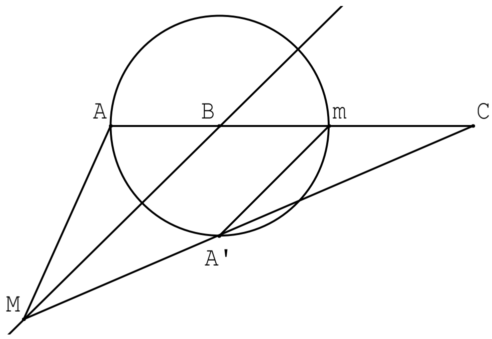
La condition d = 6 donne pour la dernière équation y = 0, ce qui correspond à un point de (AB) exclu dans cette partie du raisonnement.

Donc, si d > 6, il existe en dehors de (AB) deux points solutions du problème, symétriques par rapport à (AB), de coordonnées dans le repère défini précédemment :

$$\left(\frac{6-3d}{d-4}\,;\,\frac{\sqrt{3(d-6)(d+2)}}{d-4}\right) \text{ et } \left(\frac{6-3d}{d-4}\,;-\frac{\sqrt{3(d-6)(d+2)}}{d-4}\right).$$

<u>Solution non analytique</u> (de Jean-Marie Audigier, professeur stagiaire en 2000-2001 au lycée Dumont d'Urville, Caen)

Nous allons d'abord établir un théorème : A, B et C étant trois points distincts alignés dans cet ordre tels que AB ≠ BC, un point M en dehors de (AB) est tel que $\widehat{AMB} = \widehat{BMC}$ si et seulement si M appartient à l'image par l'homothétie de centre C et de rapport $\dfrac{CB}{CB - AB}$ du cercle de centre B passant par A.



Soit M tel que $\widehat{AMB} = \widehat{BMC}$. Alors, (BM) étant la bissectrice de $\widehat{AMC}$, les droites (MA) et (MC) sont symétriques par rapport à (BM) donc le symétrique A' de A par rapport à (BM) est sur (MC).

BA = BA' donc A' est sur le cercle de centre B passant par A.

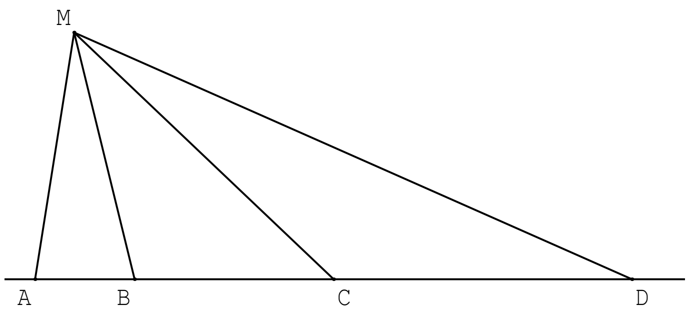
Soit m le symétrique de A par rapport à B. (mA') est perpendiculaire à (AA') puisque m et A sont diamétralement opposés.

D'autre part, (BM) qui est la médiatrice de [AA'] est aussi perpendiculaire à (AA') et donc parallèle à (mA'). Donc l'homothétie de centre C qui transforme m en B transforme A' en M. Cette homothétie a pour rapport k tel que $\overrightarrow{CB} = k\ \overrightarrow{Cm}$ soit $k = \dfrac{CB}{CB - Bm}$ ou enfin

$k = \dfrac{CB}{CB - AB}$ (défini puisque AB ≠ BC).

Réciproquement : soit M un point qui appartient à l'image par l'homothétie de centre C et de rapport $\dfrac{CB}{CB - AB}$ du cercle de centre B passant par A. On appelle A' l'antécédent de M ; c'est un point du cercle de diamètre [Am]. Donc (mA') est perpendiculaire à (AA'). Or (BM) est parallèle à (mA'), d'où (BM) est perpendiculaire à (AA'). Or BA = BA' donc A et A' sont symétriques par rapport à (BM) ainsi que les droites (MA) et (MA'). Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{BMA'}$, c'est à dire $\widehat{AMB}$ et $\widehat{BMC}$ sont donc égaux, ce qui établit le théorème.

Muni de ce nouvel outil, on peut maintenant passer à la résolution du problème proposé.



D'après le théorème précédent, $\widehat{AMB} = \widehat{BMC}$ si et seulement si M est sur le cercle (C_1) de centre I tel que $\overrightarrow{CI} = 2\ \overrightarrow{CB}$, puisque AB = 1 et BC = 2, et de rayon $r_1 = 1 \times 2 = 2$. I est donc le symétrique de B par rapport à A et le cercle (C_1) passe par B.

• Si d = 2, $\widehat{BMC} = \widehat{CMD}$ si et seulement si M est sur la médiatrice de [BD], c'est à dire la perpendiculaire en C à (AB). Or cette droite et (C_1) n'ont aucun point commun. Donc le problème, dans ce cas, n'a pas de solution en dehors de (AB).

• Si d ≠ 2, d'après le théorème précédent, $\widehat{BMC} = \widehat{CMD}$ si et seulement si M est sur le cercle de rayon $2 \times \dfrac{d}{|d-2|}$ et de centre J tel que $\overrightarrow{DJ} = \dfrac{d}{d-2}\overrightarrow{DC} = \dfrac{d}{d-2}\left(-d\,\overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{d^2}{2-d}\overrightarrow{AB}$.

Alors $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{AB} + (d+3)\,\overrightarrow{AB} + \dfrac{d^2}{2-d}\overrightarrow{AB} = \dfrac{8-2d}{2-d}\overrightarrow{AB}$. Donc $IJ = \left|\dfrac{8-2d}{2-d}\right|$.

• si d < 2, $IJ = \dfrac{8-2d}{2-d}$ et $r_1 + r_2 = 2 + 2 \times \dfrac{d}{2-d} = \dfrac{4}{2-d}$. Donc $r_1 + r_2 < IJ$ puisque, dans ce cas, 8 - 2d > 4. Les deux cercles n'ont aucun point commun. Le problème, dans ce cas , n'a pas de solution en dehors de (AB).

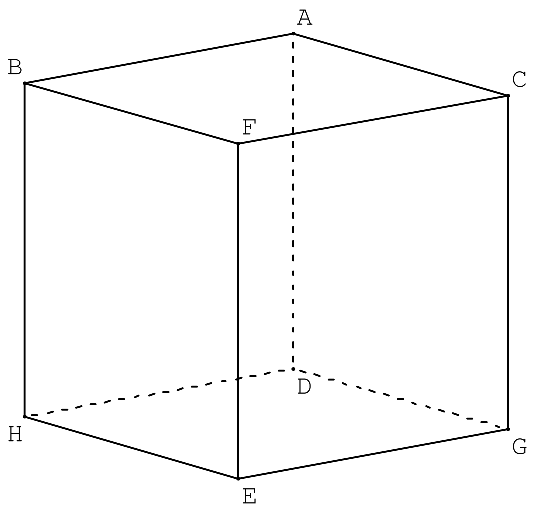
• si 2 < d < 4 , $IJ = \dfrac{8-2d}{d-2}$ et $r_1 + r_2 = 2 + 2 \times \dfrac{d}{d-2} = \dfrac{4d-4}{d-2}$. Dans ce cas, $IJ < r_1 + r_2$ puisque $8 - 2d < 4d - 4$ mais $r_2 - r_1 = \dfrac{4}{d-2}$ et $r_2 - r_1 > IJ$. Les deux cercles n'ont aucun point commun. Le problème, dans ce cas , n'a pas de solution en dehors de (AB).

• si d ⩾ 4, $IJ = \dfrac{2d-8}{d-2}$, $r_1 + r_2 = \dfrac{4d-4}{d-2}$. Donc $IJ < r_1 + r_2$ car 2d - 8 < 4d – 4. De plus $r_2 - r_1 = \dfrac{4}{d-2}$; donc $r_2 - r_1 < IJ$ si et seulement si 4 < 2d – 8 soit d > 6.

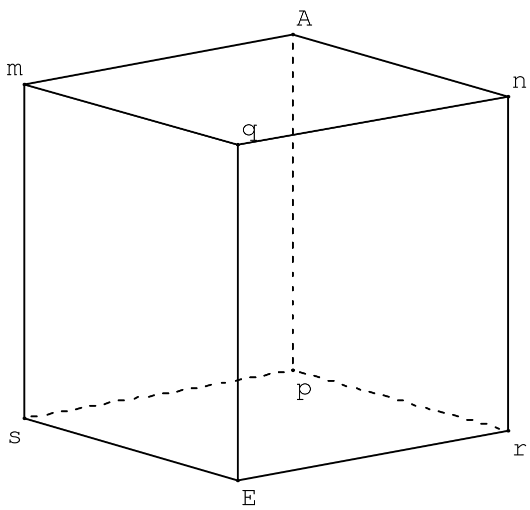
Le problème, dans ce cas n'a de solution en dehors de (AB) que si d > 6. Les cercles ont alors deux points d'intersection symétriques par rapport à (AB).

Les points M sur (AB) en dehors du segment [AD] sont, dans tous les cas, solutions du problème puisqu'alors les trois angles sont nuls.

Exercice N°4
Notations



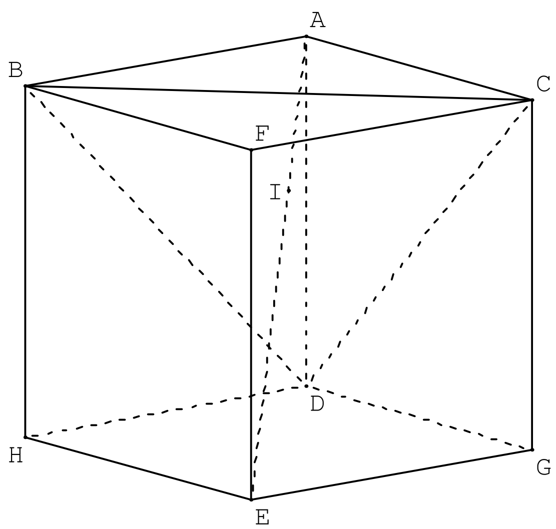
Cube (C)



Cube (C')

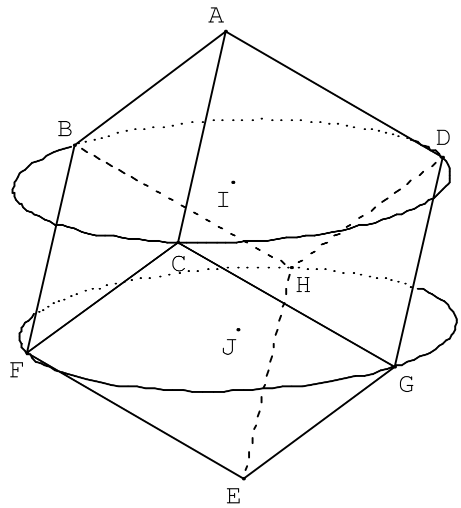
Les cubes (C) et (C') ont la même diagonale principale [AE], ces deux cubes ont donc des arêtes de même longueur. Le cube (C') peut donc être obtenu en faisant tourner le cube (C) autour de la droite (AE).
[BC], [CD] et [DB] sont des diagonales de faces du cube (C) donc BC = CD = DB ; BCD est un triangle équilatéral ; soit (P_1) le plan (BCD).

La droite (EF) est perpendiculaire au plan (ABFC) donc (EF) est orthogonale à (BC) ; (BC) est de plus perpendiculaire à (AF) puisque ces droites sont deux diagonales du carré ABFC ; (BC) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (ADEF) donc (BC) est orthogonale à toute droite de ce plan, en particulier à la droite (AE).
On démontre de la même manière que (BD) est orthogonale à la droite (AE).
(AE) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (P_1) donc (P_1) est un plan perpendiculaire à (AE).

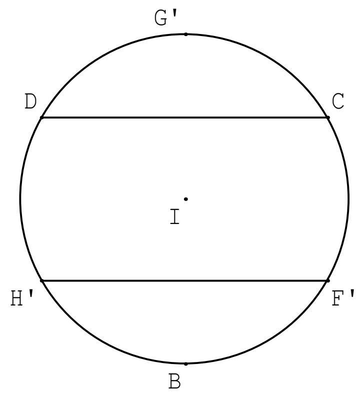


Soit I le point d'intersection de (AE) avec le plan (P_1). Les triangles AIB, AIC, AID sont rectangles en I, ils ont le côté [AI] en commun et ont des hypoténuses de même longueur donc IB = IC = ID ; B, C et D sont sur un cercle (K_1) de centre I situé dans (P_1).
On démontre bien sûr de même que F, G et H sont les sommets d'un triangle équilatéral situé dans un plan (P_2) perpendiculaire à (AE) coupant (AE) en un point J centre du cercle (K_2) circonscrit à FGH .

Les deux cercles sont situés dans des plans perpendiculaires à (AE) et donc parallèles ; ils ont même rayon, et (IJ) est perpendiculaire à ces plans donc les projetés orthogonaux de F, G et H sur le plan (P_1) sont trois points F', G', H' de (K_1) sommets d'un triangle équilatéral.



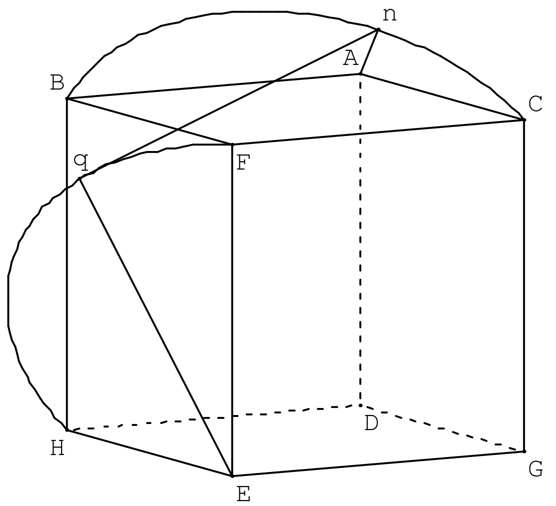
Or (FH), diagonale du carré EFBH, est parallèle à (CD), diagonale du carré ACGD. Donc (F'H') est parallèle à (CD). Comme (F'H') n'est pas confondue avec (CD), on obtient la figure ci-contre.



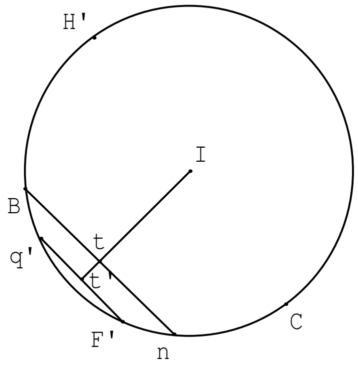
C'est à dire que les six points sont les sommets d'un hexagone régulier.

De la même façon, m, n et p sont sur le cercle (K_1) et q, r et s sont sur le cercle (K_2). Les projetés orthogonaux de q, r et s sur (P_1) sont trois points q', r' et s' de (K_1) tels que mq'nr'ps' soit un hexagone régulier.

Sur la figure ci-contre, ne sont représentés que le cube (C) et les sommets n et q du cube (C') qui sont obtenus par rotation des sommets C et F autour de (AE). On a aussi représenté deux arcs des cercles (K_1) et (K_2) sur lesquels se trouvent n et q.



Par projection orthogonale sur le plan (P_1), on obtient :



t et t' sont les milieux respectifs de [nB] et [F'q'].

Alors $\left(\widehat{\overrightarrow{It}, \overrightarrow{It'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{It}, \overrightarrow{IB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IF'}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{IF'}, \overrightarrow{It'}}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\widehat{\overrightarrow{In}, \overrightarrow{IB}}\right) + \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\left(\widehat{\overrightarrow{IF'}, \overrightarrow{Iq'}}\right)$$

Donc $\left(\widehat{\overrightarrow{It}, \overrightarrow{It'}}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\widehat{\overrightarrow{In}, \overrightarrow{IC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}}\right)\right] + \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\alpha$

où α est l'angle de la rotation.

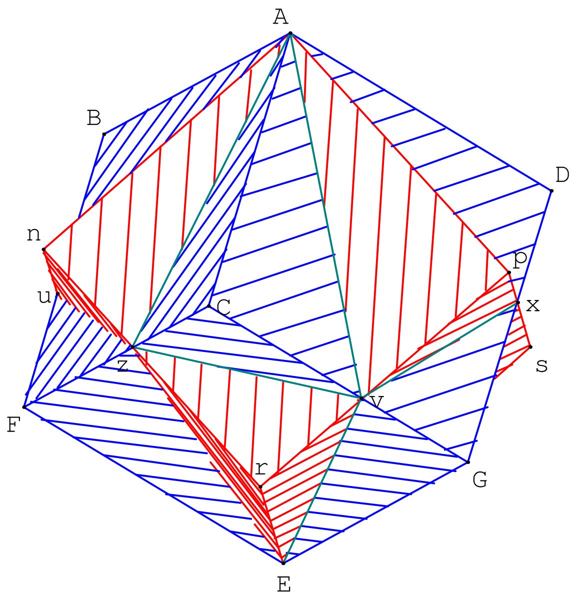
D'où $\left(\widehat{\overrightarrow{\text{It}}, \overrightarrow{\text{It'}}}\right) = \frac{1}{2}\left[-\alpha - \frac{2\pi}{3}\right] + \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\alpha = 0.$

Donc les droites (Bn) et (F'q') sont parallèles ainsi que (Bn) et (Fq) qui sont alors coplanaires. BnFq est un trapèze dont les diagonales se coupent en un point u. Ces diagonales sont les arêtes (BF) de (C) et (nq) de (C').

Par permutation circulaire, (CG) coupe (pr) en v, (DH) coupe (ms) en w. De plus Bu = Cv = Dw.

O milieu de [AE] est le centre de symétrie des cubes ; dans la symétrie par rapport à O, B, C et D sont transformés respectivement en G, H et F, et réciproquement ; de même n, p et m sont transformés respectivement en s, q et r, et réciproquement.

Alors (GD) coupe (sp) en x, (HB) coupe (qm) en y, (FC) coupe (rn) en z et Gx = Hy = Fz = Bu.



Soit d la longueur commune des six segments [Bu], [Cv], [Dw], [Fx], [Hy] et [Gs].

La partie du cube (C) non commune aux deux cubes est constituées de six tétraèdres de mêmes dimensions AByu, ACzv, ADxw, EFzu, EGxv EHyw. Le volume de ACzv est $\frac{1}{3} \times \text{AC} \times \text{Aire}(\text{Czv}) = \frac{1}{6} \times \text{AC} \times \text{Cv} \times \text{Cz}$.

Or AC = a, Cv = d et Cz = a – d.

D'où le volume V(d) de la partie commune aux cubes est

$\text{V(d)} = a^3 - 6 \times \frac{1}{6} \times a \times d \times (a - d)$

soit $\text{V(d)} = a^3 - ad(a - d)$.

$[d \mapsto a(a - d)]$ est une fonction du second degré qui admet, puisque le coefficient de d^2 est négatif, un maximum pour $d = \frac{a}{2}$. V admet donc un minimum égal à $V\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{3a^3}{4}$.