OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES
ACADÉMIE D'ORLÉANS TOURS
CLASSE DE PREMIÈRE

Mercredi 26 mars 2003

DURÉE : 4 heures

Exercice 1

Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à n (on rappelle que la page numérotée 1 est toujours une page de droite). On additionne les numéros de toutes les pages et on trouve un total égal à 2003. Mais deux pages numérotées sont restées collées et leurs numéros n'ont pas étés comptés.

Quels sont le nombre de page du livre et les numéros des pages collées ?

Exercice 2

L'unité de longueur est 1cm , l'unité de volume est 1cm^3.
ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle pour lequel les faces ABCD et EFGH sont parallèles et AE=BF=CG=DH=3. D'autre part AB=1 et AD=2.

1°) On considère dans cette question les tétraèdres MNPQ dont les sommets sont des sommets du parallélépipède ABCDEFGH .

a) déterminer tous ceux dont le volume est exactement 1.
b) On démontre, dans les cours de dénombrement, qu'il y a 70 tétraèdres distincts dont les sommets sont des sommets du parallélépipède ABCDEFGH: certains sont plats et leur volume est alors $0\ \text{cm}^3$ (par exemple ABCD).
Déterminer les différentes valeurs prises par le volume du tétraèdre MNPQ et pour chacune d'elles le nombre de tétraèdres qui la fournissent.

2°) On considère dans cette question les tétraèdres MNPQ dont les sommets sont sur des segments d'arête du parallélépipède ABCDEFGH .
Déterminer ceux dont le volume est maximal et calculer ce volume maximal.

Exercice 3

On se propose de déterminer toutes les configurations de quatre points distincts A, B, C, D du plan tels que leurs distances mutuelles AB, AC, AD, BC, BD, CD, ne prennent que deux valeurs exactement que l'on notera x et y. C'est par exemple le cas lorsque ABCD est un carré, x est alors la longueur des cotés et y celle des diagonales.

1°) *Etude du cas « 1,5 » où l'une des distances est égale à x et les cinq autres à y.*
Montrer qu'il existe, à l'ordre près des points, une seule configuration répondant à la question.
Dessiner cette configuration.

2°) *Etude du cas « 2,4 » où deux distances sont égales à x et les quatre autres à y.*

a) On suppose que les deux segments de longueur x n'ont pas de sommets commun.
Quelle configuration obtient-on ? La dessiner.
b) Que se passe t'il lorsque les deux segments de longueur x ont un sommet en commun ?

3°) Etudier le cas « 3,3 » .

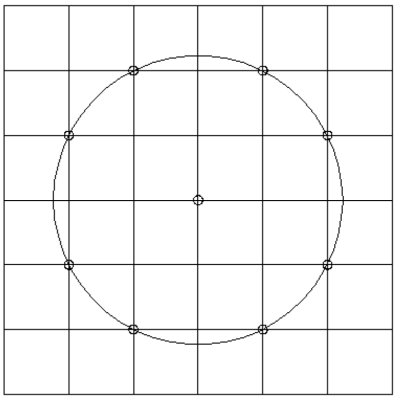
Exercice 4 : La table de jardin

René dispose dans son jardin d'une très grande terrasse carrelée avec de très belles dalles carrées de 0,5m de coté. Il décide de construire sur cette terrasse une table ronde avec les pieds sur le bord et un parasol central.

René est un bricoleur prévoyant, aussi, pour gagner en stabilité, il décide que la table devra avoir le maximum de pieds, tous solidement fixés dans le sol. Tout comme le parasol car on n'est jamais à l'abri d'un coup de vent…

Mais René est aussi un bricoleur soigneux ; alors pour ne pas détériorer les dalles, il choisit de percer la terrasse uniquement aux intersections des joints de séparation.

La figure ci dessous donne un exemple de table à 8 pieds.



Si n désigne le nombre de pieds de la table et d son diamètre exprimé en mètres, on définit le coefficient de solidité s de la table par la formule

$$s = \frac{n}{d}$$

Une table est donc d'autant plus solide que son coefficient de solidité est élevé.

1°) Calculer le coefficient de solidité de la table dessinée ci-dessus.

2°) Quelles sont les deux tables les plus petites ? Préciser leur coefficient de solidité.

3°) Quel est le coefficient de solidité maximal d'une table à 12 pieds ?

4°) Quelle est la table la plus solide ?

5°) René peut-il fabriquer une table à 16 pieds dont le diamètre exprimé en mètres est un nombre entier ?